



Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galați

13 februarie 2010

Clasa a XI-a

Barem de evaluare

- ♦ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- ♦ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Nr. problemei	Soluție, rezolvare	Punctaj
1.	$\det(X^{2010}) = 0$; $\det(X^{2010}) = (\det(X))^{2010} = 0 \Rightarrow \det(X) = 0$.	2p
	<p>Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, a, b, c, d \in \mathbb{R}$, cu $\det(X) = a \cdot d - b \cdot c = 0$.</p> <p>Din relația Cayley-Hamilton , rezultă că</p> $X^{2010} = (a+d)^{2009} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (TrX)^{2009} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$ <p>Obținem sistemul:</p> $\begin{cases} (a+d)^{2009} a = 4 \\ (a+d)^{2009} b = 6 \\ (a+d)^{2009} c = 8 \\ (a+d)^{2009} d = 12 \end{cases}$	2p
	<p>Din prima și ultima ecuație, rezultă că: $(a+d)^{2010} = 16$, de unde</p> $a+d = 16^{\frac{1}{2010}}, \text{ deci } (a+d)^{2009} = 16^{\frac{2009}{2010}} = p$ <p>Înlocuind în cele patru relații, obținem :</p> $a = \frac{4}{p}; b = \frac{6}{p}; c = \frac{8}{p}; d = \frac{12}{p}$ <p>Deci soluția ecuației este : $X = \frac{1}{p} \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}, p = 16^{\frac{2009}{2010}}$</p>	3p

2.	<p>Notăm $X - Y = A$, $Y - Z = B$, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Rezultă</p> $A + B = X - Y + Y - Z = X - Z \text{ și } AB = (X - Y)(Y - Z) = O_n.$ <p>Cum matricele X, Y, Z comută două câte două, obținem</p> $AB = (X - Y)(Y - Z) =$ $= XY - XZ - Y^2 + YZ = YX - ZX - Y^2 + ZY \text{ și } BA = (Y - Z)(X - Y) =$ $= YX - Y^2 - ZX + ZY, \text{ de unde } AB = BA = O_n \text{ (deci matricele } A \text{ și } B \text{ sunt comutabile).}$ $A^2 B^2 = A(AB)B = A(BA)B = (AB)(AB) = (AB)^2 = (BA)^2 = B(AB)A =$ $= B(BA)A = (BB)(AA) = B^2 A^2.$	2p
	$A^2 B^2 = A(AB)B = A(BA)B = (AB)(AB) = (AB)^2 = (BA)^2 = B(AB)A =$ $= B(BA)A = (BB)(AA) = B^2 A^2.$	2p
	$\det((X - Y)^4 + (Y - Z)^4 + (Z - X)^4) = \det(A^4 + B^4 + (A + B)^4) =$ $= \det((A^2 + B^2)^2 - 2A^2 B^2 + [(A + B)^2]^2) = \det((A^2 + B^2)^2 - 2(AB)^2 + (A^2 + B^2)^2)$ $= \det((A^2 + B^2)^2 - 2 \cdot O_n^2 + (A^2 + 2O_n + B^2)^2) = \det((A^2 + B^2)^2 + (A^2 + B^2)^2)$ $= \det(2(A^2 + B^2)^2) = 2^n \cdot \det((A^2 + B^2)^2) = 2^n (\det(A^2 + B^2))^2 \geq 0.$	3p
3.	$x_{n+1} - x_n = \frac{3 \cdot (x_n - x_{n-1})}{(x_n + 2) \cdot (x_{n-1} + 2)}.$ <p>Se demonstrează prin inducție matematică că $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ șir mărginit inferior.(1)</p> <p>Așadar,</p> $\operatorname{sgn}(x_{n+1} - x_n) = \operatorname{sgn}(x_n - x_{n-1}) = \operatorname{sgn}(x_{n-1} - x_{n-2}) = \dots = \operatorname{sgn}(x_1 - x_0),$ <p>unde $x_1 - x_0 = \frac{2 \cdot x_0 + 1}{x_0 + 2} - x_0 = \frac{1 - x_0^2}{x_0 + 2} < 0$, pentru $x_0 > 1$. Deci $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este strict descrescător.(2)</p> <p>Din (1) și (2) $\xrightarrow{Th.W} (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent.</p>	2p

	<p>b) Prin trecere la limită în relația de recurență rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$.</p> $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot (\sqrt{x_n} - 1) = [0 \cdot \infty] = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot \frac{x_n - 1}{\sqrt{x_n} + 1} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{\frac{1}{x_n - 1}} = (*)$ <p>Apoi, $x_n - 1 = \frac{2 \cdot x_{n-1} + 1}{x_{n-1} + 2} - 1 = \frac{x_{n-1} - 1}{x_{n-1} + 2}$, deci</p> $\operatorname{sgn}(x_n - 1) = \operatorname{sgn}(x_{n-1} - 1) = \operatorname{sgn}(x_{n-2} - 1) = \dots = \operatorname{sgn}(x_0 - 1) = +1$ <p>Așadar, $x_n > 1, \forall n \in \mathbb{N}$.</p> <p>Deci, $\left(\frac{1}{x_n - 1} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ este șir strict crescător și nemărginit superior.</p>	3p
	$(*) = \frac{1}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{\frac{1}{x_n - 1}} \stackrel{(Lema S-C)}{=} \frac{1}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 - n^2}{\frac{1}{x_{n+1} - 1} - \frac{1}{x_n - 1}} =$ $= \frac{1}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2 \cdot n + 1) \cdot (x_n - 1) \cdot (x_{n+1} - 1)}{x_n - x_{n+1}} =$ $= \frac{1}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2 \cdot n + 1) \cdot (x_n - 1) \cdot \left(\frac{2 \cdot x_n + 1}{x_n + 2} - 1 \right)}{x_n - \frac{2 \cdot x_n + 1}{x_n + 2}} =$ $= \frac{1}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2 \cdot n + 1) \cdot (x_n - 1)^2}{x_n^2 - 1} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2 \cdot n + 1) \cdot (x_n - 1)}{x_n + 1} =$ $= \frac{1}{4} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} [2 \cdot n(x_n - 1) + (x_n - 1)] = \frac{1}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot (x_n - 1) =$ $= \frac{1}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n - 1}} \stackrel{(Lema S-C)}{=} \frac{1}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{x_{n+1} - 1} - \frac{1}{x_n - 1}} =$ $= \frac{1}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x_{n+1} - 1) \cdot (x_n - 1)}{x_n - x_{n+1}} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x_n - 1)^2}{x_n^2 - 1} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - 1}{x_n + 1} = 0.$	2p

4.	<p>1. Din ipoteză, rezultă că $f(x) \geq 0, \forall x \in [0,1]$ (1)</p> <p>Dacă $a = b = 0 \Rightarrow f(0) + f(0) \leq f(0) \Rightarrow f(0) \leq 0$ (2)</p> <p>Din (1) și (2), rezultă $f(0) = 0 = \min_{x \in [0,1]} f(x)$.</p> <p>Dar $\forall x \in [0,1] \Rightarrow 1-x \in [0,1]$ și $x + (1-x) = 1 \leq 1$.</p> <p>Așadar, $f(x) + f(1-x) \leq f(1) = 1 \Rightarrow f(x) \leq 1 \Rightarrow \max_{x \in [0,1]} f(x) = f(1) = 1$.</p>	2p
	<p>2.</p> <p>Fie $x, y \in [0,1]$ astfel încât $x \leq y \leq 1$;</p> <p>$x + (y-x) = y \Rightarrow f(x) + f(y-x) \leq f(y) \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.</p> <p>Deci funcția f este monotonă.</p> <p>Fie $x_1, x_2, x_3 \in (0,1) \Rightarrow f(x_1), f(x_2), f(x_3) \in (0, \infty)$.</p> <p>Presupunem că $x_1 < x_2 < x_3$. Să demonstrăm că $f(x_2 - 0)$ și $f(x_2 + 0)$ sunt finite.</p> <p>Fie funcția f este crescătoare .</p> <p>Dacă $x_1 < x < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$;</p> <p>Dacă $x_2 < x < x_3 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x) \leq f(x_3)$.</p> <p>Prin trecere la limită în ambele inegalități, se obține: $f(x_1) \leq \lim_{x \nearrow x_2} f(x) \leq f(x_2)$ și $f(x_2) \leq \lim_{x \searrow x_2} f(x) \leq f(x_3)$. Așadar, $f(x_2 - 0)$ și $f(x_2 + 0)$ sunt finite.</p> <p>Rezultă că funcția f are limite laterale finite în orice punct $x_0 \in (0,1)$.</p>	2p
	<p>3. $f : [0,1] \rightarrow [0, \infty), f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 1, & x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$</p> <p>Se demonstrează că funcția f verifică proprietățile a) și b).</p>	3p